2M

УДК 681.3.06:518.12

В.Ф. Миргород
ОАО «Элемент», г. Одесса, Украина
odessa@element.od.ua

Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода

Предложено обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту. Рассмотрены и доказаны теоремы, устанавливающие аналитический вид резольвенты по заданному ядру для ряда важных частных случаев, а именно при сепарабельном виде ядра. Рассмотрены задачи аналитического решения интегральных уравнений Вольтерра II-го рода с дельтаобразной и осцилирующей особенностью в ядре.

Введение

Описание динамических объектов и систем в виде операторной связи множества входных воздействий и выходных координат допускает разные формы представления такого преобразования в зависимости от выбранного класса математических моделей. Формально эквивалентные относительно оператора (абстрактной функции) преобразования, различные математические модели могут существенно отличаться по способам и особенностям численной реализации. Важным и проблемным вопросом является определения такого класса математических моделей, которые бы обеспечили наилучшие характеристики в численной реализации. Известные преимущества интегральных моделей, в частности интегральных уравнений Вольтерра II-го рода, предопределяют необходимость и практическую значимость рассмотрения методов отыскания различных форм их аналитических решений, на основе решения соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

1. Постановка проблемы и цель исследования

Теоретическим основам решения интегральных уравнений посвящен ряд фундаментальных работ [1-3]. Методы и алгоритмы их численного решения детально рассмотрены в справочной литературе [3], [4]. Особенности интегро-дифференциальных уравнений и программные средства их решения изложены в [5], [6]. Для отдельных частных случаев интегральных уравнений в [1-3] предлагаются также некоторые аналитические решения. В то же время практика применения междисциплинарного моделирования динамических систем [7], [8] требует систематического рассмотрения вопросов отыскания решений интегральных уравнений, применяемых в качестве математических моделей исследуемых объектов. В первую очередь это касается интегральных уравнений Вольтерра II-го рода, имеющих широкую область применения в прикладных задачах и для которых разработаны эффективные методы численного решения [3].

Целью настоящей работы является обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

2. Основные результаты исследования

Интегральное уравнение Вольтерра II-го рода

$$y(x) = \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x), \quad a \le x, s \le b \tag{1}$$

имеет следующее решение в аналитическом виде

$$y(x) = \int_a^x R(x,s)f(s)ds + f(x), \quad a \le x, s \le b, \tag{2}$$

для отыскания которого необходимо разрешить более сложное, по сравнению с исходным уравнением (1), интегральное уравнение для резольвенты

$$R(x,s) = K(x,s) + \int_s^x K(x,t)R(t,s)dt. \tag{3}$$

Известные [1-3] условия существования и единственности решения уравнения (1) заключаются в непрерывности ядра $K(x,s)$ на сторонах и внутри треугольника $x \ge a, s \le b, x = s,\ b > a$, а также в условиях ограниченности функции $f(x)$.

Решение уравнения для резольвенты (3) имеет важное значение как для теории интегральных уравнений, так и для прикладных задач, поскольку отыскание резольвенты по известному ядру из (3) предоставляет возможность решить тем самым целый класс интегральных уравнений Вольтерра II-го рода с различными правыми частями в виде функций $f(x)$.

С другой стороны, вовсе не является обязательным нахождение аналитического решения исходного уравнения, так как функции $f(x)$ могут быть заданы в виде числовых массивов, и на основе (2) при известной резольвенте легко определяются искомые решения (1) в численном виде.

Для одного из типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода, а именно, для уравнений с разностным ядром, на основе операционного метода [1-3] интегральное уравнение относительно резольвенты (3) приводится к алгебраическому уравнению для изображений, которое легко решается. Решение других типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода, а также еще более сложного уравнения относительно резольвенты, в общем случае сталкивается со значительными трудностями. Известны только отдельные частные случаи таких решений, некоторые из которых приведены в [3]. Тем не менее, сам вид известных решений для частных случаев уравнения (3) подсказывает возможность для их обобщения в более широкий класс функций для ядра $K(x, s)$, и соответственно для резольвенты $R(x, s)$. Рассмотрим один из подходов для такого обобщения с использованием приведенных далее утверждений, справедливость которых легко устанавливается непосредственной подстановкой в (3).

Лемма 1. Если в интегральном уравнении Вольтерра II-го рода (1) ядро тождественно равно 1: $K(x,s) = 1$, то решением уравнения для резольвенты (3) является функция $R(x,s) = exp(x - s)$.

Лемма 2. Если в интегральном уравнении Вольтерра II-го рода (1) ядро тождественно равно константе $\lambda : K(x,s) = \lambda$, то решением уравнения для резольвенты (3) является функция $R(x,s) = \lambda exp(\lambda x - \lambda s)$.

Соответствие согласно Лемме 1 совпадает с приведенным в табл. 1 источника [3], а соответствие согласно Лемме 2 уточняет известный результат, приведенный там же.

Обобщение известных результатов для вырожденного ядра в виде простого произведения одномерных функций устанавливает следующая теорема 1.

Теорема 1. Если в интегральном уравнении Вольтерра II-го рода (1) ядро является сепарабельным, вида

$$K(x,s) = \alpha(x)\beta(s)\,, \tag{4}$$

то решением уравнения для резольвенты (3) является функция

$$R(x,s) = \alpha(x)\beta(s)exp\left[F(x) - F(s)\right], \tag{5}$$

где $F(u)$ – первообразная функция относительно функции

$$K(u,u) = \alpha(u)\beta(u)\,. \tag{6}$$

Необходимость приведенных утверждений следует из подстановки ядра и резольвенты в интеграл правой части (3)

$$\int_s^x б(x)в,t)б)б(t)в(exp\left[F(t) - F(s)\right]dt = б(x)exp\left[-F(s)\right]в(s)\int_s^x exp\left[F\right]dF =$$

$$= б(x)в(s)exp\left[F(x) - F(s)\right] - б(x)в(s)$$

Достаточность в общем случае следует из единственности решения интегрального уравнения (1). Согласно [1], резольвента есть целая функция, а решение интегрального уравнения (1) единственным образом определяется выражением (2). Если решение (3) не единственно, а имеется два решения $R_1(x,\ s)$ и $R_2(x,\ s)$, то они оба должны удовлетворять уравнению (3)

$$R_1(x,s) = K(x,s) + \int_s^x K(x,t)R_1(t,s)dt,$$

$$R_2(x,s) = K(x,s) + \int_s^x K(x,t)R_2(t,s)dt.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем следующее интегральное уравнение

$$R_1(x,s) - R_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)\left[R_1(t,s) - R_2(t,s)\right]dt\,.$$

Полученное уравнение является интегральным уравнением Вольтерра I-го рода, которое, как известно [1], имеет только нулевое решение, следовательно

$$R_2(x,s) = R_1(x,s)\,.$$

Многие из приведенных в табл. 1 [3] решений являются частным случаем результата теоремы 1. Нетрудно установить соответствие (5) известному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка [9]. Так как ядро (4) является сепарабельным, то исходное интегральное уравнение в этом случае эквивалентно именно такому дифференциальному уравнению [3].

Дальнейшее обобщение результата теоремы 1 может быть получено на основе следующей теоремы 2.

Теорема 2. Если в интегральном уравнении Вольтерра II-го рода (1) ядро является сепарабельным, вида

$$K(x,s)=\vec{б}'(x)A\vec{в}(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}б_i(x)в_k(s), \qquad (7)$$

где A – матрица постоянных коэффициентов, то решением уравнения для резольвенты (3) является функция

$$R(x,s)=\vec{б}'(x)F(x,s)A\vec{в}(s), \qquad (8)$$

где $F(x,s)$ представляет собой фундаментальную матрицу – решение следующего уравнения

$$\frac{d}{dx}F'(s,x)=-\vec{в}(x)\vec{б}'(x)AF(s,x) \qquad (9)$$

с начальным условием, равным единичной матрице E.

Необходимость приведенных утверждений следует из подстановки ядра и резольвенты в (3)

$$\vec{б}'(x)F(x,s)A\vec{в}(s)=\vec{б}'(x)A\vec{в}(s)+\vec{б}'(x)\int_s^x A\vec{в}(t)\vec{б}'(t)F(t,s)dtA\vec{в}(s). \qquad (10)$$

Необходимым условием для выполнения равенства (10) является следующее условие

$$\vec{б}'(x)(F(x,s)-E-\int_s^x A\vec{в}(t)\vec{б}'(t)F(t,s)dt)A\vec{в}(s)=0.$$

Из последнего выражения следует

$$F(x,s)=E+\int_s^x A\vec{в}(t)\vec{б}'(t)F(t,s)dt. \qquad (11)$$

Однако (11) и (10) являются эквивалентными формами уравнения для фундаментальной матрицы $F(x,\ s)$, что и устанавливает необходимость представленных в теореме утверждений.

Заметим, что эквивалентной формой интегрального уравнения Вольтерра II-го рода (1) с сепарабельным ядром вида (7) являются дифференциальные уравнения динамической системы со скалярным входом и скалярным выходом в пространстве состояний

$$\frac{d}{dx}\vec{н}(x)=A\vec{в}(x)\vec{б}'(x)\vec{н}(x)+\vec{в}(x)f(x),$$

$$y(x)=\vec{\alpha}(x)'\vec{\nu}(x)+f(x),$$

решение которых при нулевых начальных условиях имеет вид [9]

$$y(x)=\vec{\alpha}'(x)\int_a^x F(x,s)A\vec{\beta}(s)f(s)ds+f(x),$$

где матрица $F(x,\ s)$ определяется (9), что и устанавливает вид ядра $R(x,\ s)$.

Достаточность устанавливается аналогично теореме 1 из единственности решения интегрального уравнения (1).

Представленное теоремой 2 обобщение является весьма существенным, так как вводит в рассмотрение более широкий класс интегральных уравнений Вольтерра II-го

рода с сепарабельным ядром, и представляет возможность получить их аналитическое решение, а известные результаты соответствуют такому частному случаю, когда матрица коэффициентов A в ядре (7) является единичной матрицей. Достаточно очевидной становится также фундаментальная связь решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода с решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений [9].

Дальнейшим шагом в развитии результатов, представленных в [3], является следующая теорема 3.

Теорема 3. Если $K(x, s)$ является ядром некоторого интегрального уравнения Вольтерра II-го рода (1), а $R(x, s)$ – его резольвента, удовлетворяющая уравнению (3), то решением уравнения (3) для ядра $[\varphi(x)/\varphi(s)]K(x, s)$ является резольвента $[\varphi(x)/\varphi(s)]R(x, s)$, при этом должны выполняться условия непрерывности ядра $[\varphi(x)/\varphi(s)]K(x, s)$.

Следствие. Условия теоремы 2 применимы к любому интегральному уравнению Вольтерра II-го рода, в том числе и к результату теоремы 2. Поэтому если ядро интегрального уравнения (1) может быть представлено в виде

$$K(x,s) = [\varphi(x)/\varphi(s)]\vec{б}'(x)A\vec{в}(s) = [\varphi(x)/\varphi(s)]\sum_{i}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}б_i(x)\,в_k(s),$$

то решением уравнения (3) для резольвенты является функция

$$R(x,s) = [\varphi(x)/\varphi(s)]\vec{б}'(x)F(x,s)A\vec{в}(s),$$

при тех же условиях непрерывности ядра.

Для оценки полученных результатов по обобщению решений указанных типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода и исследованию новых их решений использованы программные средства пакета Symbolic Math Toolbox Matlab 6.5, который базируется на применении ядра символьной математики системы компьютерной алгебры Maple V R4 [10]. Приведенные выше утверждения и теоремы проверены с использованием языка символической математики и полностью подтверждены. Выполнена компьютерная реализация решений уравнения для резольвенты, не содержащихся в табл. 1 источника [3]. Все приведенные в указанном источнике результаты проверены, и в некоторые из них внесены необходимые уточнения.

Иллюстрации на рис. 1 и 2 представляют ядро и резольвенту для ранее не рассматриваемого случая, когда изображение разностного ядра является трансцендентным, в данном примере в виде радикала $\sqrt{p}$, где p – оператор Лапласа.

Дальнейшее обобщение известных общих решений уравнений Вольтерра II-го рода с использованием резольвенты основано на допущении, что в ядре может быть выделена δ-образная мультипликативная особенность в виде

$$K(x,s) = K_0(x,s)\varphi(x,s), \qquad (12)$$

где $\varphi(x,s)$ – близкая к δ-функции в том смысле, что ее относительная ширина много меньше относительной ширины корневой функции $K_0(x,s)$ в пределах области интегрирования.

В идеализированном случае $\varphi(x,s) = \delta(x,s)$, где $\delta(x,s)$ – дельта-функция Дирака. Детализируя (12) в виде

$$K(x,s) = K_0(x,s)\delta(s), \qquad (13)$$

естественно предположить, что является справедливым следующее представление для резольвенты

$$R(x,s) = R_0(x,s)\delta(s), \tag{14}$$

что приводит к приближенным соотношениям, следующим из (1) и (2)

$$\hat{y}(x) = K_0(x,0)y(0) + f(x),$$
$$\hat{y}(x) = R_0(x,0)f(0) + f(x),$$

второе из которых дает приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра II-го рода с ядром вида (13) через корневую функцию резольвенты $R_0(x, s)$.

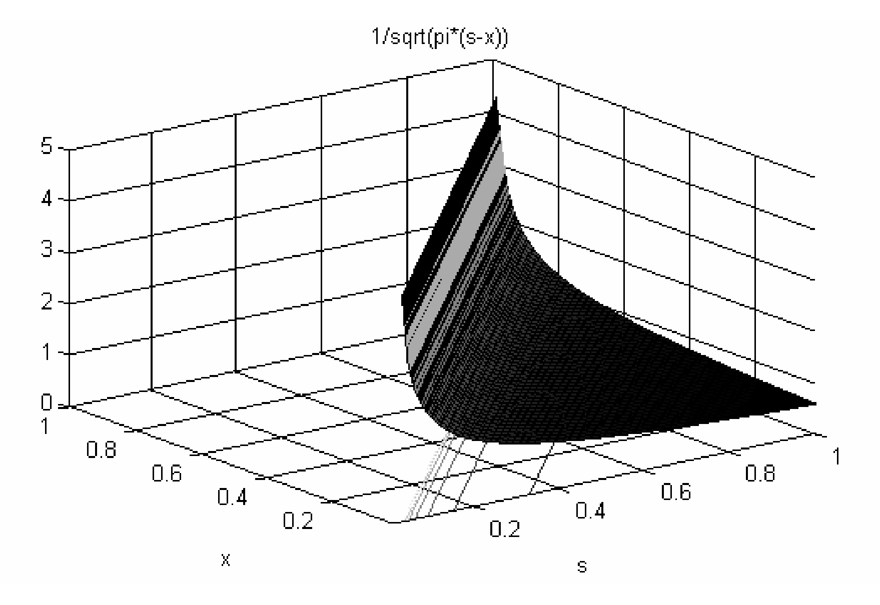


Рисунок 1 – Разностное ядро для трансцендентного случая

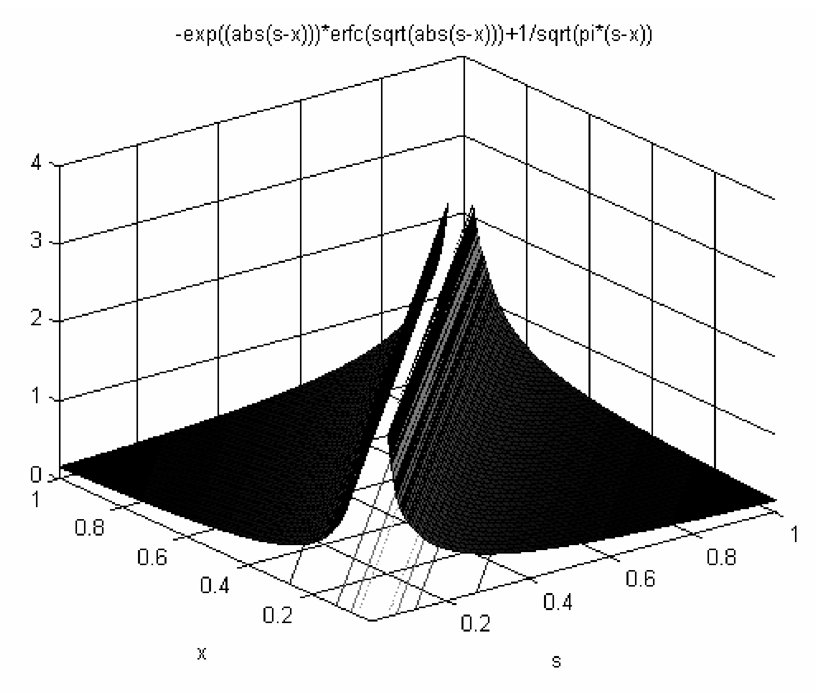


Рисунок 2 – Резольвента для трансцендентного случая

Из уравнения для резольвенты (3) с ядром (13) следует следующее уравнение для корневых функций

$$R_0(x,s) = K_0(x,s) + K_0(x,0)R_0(0,s), \tag{15}$$

которое имеет следующее решение

$$R_0(x,s) = K_0(x,s) + K_0(x,0)K_0(0,s)/(1-K_0(0,0)). \tag{16}$$

Заметим, что (15) полностью совпадает по структуре с известным [1] уравнением для изображений ядра и резольвенты в том случае, если ядро является разностным.

Справедливость уравнения для корневой функции устанавливается исходя из известного представления резольвенты через итерированные ядра

$$R(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{k+1}(x,s),$$

где итерированные ядра подчиняются рекуррентному соотношению

$$K_1(x,s) = K(x,s),$$

$$K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_n(t,s)dt.$$

Для ядра вида (13) последовательность итераций выглядит следующим образом

$$K_1(x,s) = K_0(x,s)\delta(s),$$

$$K_2(x,s) = \int_s^x \partial(t)K(x,t)\partial)\partial(s\ _0(t,s)dt = \partial(s)K_0(x,0)K_0(0,s),$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x \partial(t)K(x,t)\partial)\partial(s\ _0(t,0)K_0(0,s)dt = \partial(s)K_0(x,0)K_0(0,s)K_0(0,0),$$

$$K_3(x,s) = \partial(s)K_0(x,0)K_0(0,s)K^2{}_0(0,0)$$

$$\ldots$$

$$K_{n+1}(x,s) = \partial(s)K_0(x,0)K_0(0,s)K^{n-1}{}_0(0,0).$$

Поэтому резольвента имеет следующий вид, что подтверждает (14)

$$R(x,s) = \partial(s)K_0(x,s) + \partial(s)K_0(x,0)K_0(0,s)\sum_{n=0}^{\infty} K^n{}_0(x,s).$$

Учитывая формулу для бесконечной геометрической прогрессии, получаем окончательно

$$R_0(x,s) = K_0(x,s) + K_0(x,0)K_0(0,s)/(1-K_0(0,0)),$$

что подтверждает справедливость уравнения (15) и дает возможность определить решение

$$\hat{y}(x) = f(x) + \int_a^x (K_0(x,s) + K_0(x,0)K\ _0(0,s))/(1 - K_0(0,0))\ \partial 0{,}0 f(s)ds.$$

Из (14) и (16) получаем следующее выражение для приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода с ядром вида (13)

$$\hat{y}(x) = f(x) + f(0)K_0(x,0)K_0(0,s)/(1-K_0(0,0)), \tag{17}$$

которое не требует предварительного определения резольвенты.

При компьютерной реализации (17) следует учитывать, что реальные δ-образные функции имеют конечную продолжительность, поэтому (17) модифицируется к виду

$$\hat{y}(x) = f(x) + f(0)K_0(x,0)K_0(0,s)/(1 - K_0(0,0)pl), \quad (18)$$

где $pl = \int_a^\infty \varphi(s)ds$ – является площадью под δ-образной функцией.

Примечательным является тот факт, что решение (18) существует, даже если $K_0(0,0) = 1$, что приводит к невозможности определить приближенное решение из (17).

Для класса сепарабельных ядер (4) с рассматриваемой особенностью получаем следующее приближенное решение

$$\hat{y}(x) = f(x) + f(0)K_0(x,0)K_0(0,s)/(1 - K_0(0,0)) = f(x) + f(0)\overrightarrow{\alpha}'(x)\beta(0)(1 - \overleftarrow{\alpha}'(0)\overrightarrow{\beta}(0)),$$

которое приводит к следующему результату

$$\hat{y}(x) = f(x) + f(0)\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k(x),$$

где $a_k = \beta_k(0)(1 - \overleftarrow{\alpha}'(0)\overrightarrow{\beta}(0))$ – постоянные коэффициенты.

Нетрудно усмотреть сходство полученного приближенного решения с решением соответствующего интегрального уравнения Фредгольма II-го рода [1], решение которого всегда выражается через базисные функции $\alpha_k(x)$. Действительно, при наличии в ядре δ-образной особенности не является существенным верхний предел в уравнении Вольтерра II-го рода, поэтому получаемое приближенное решение приближается к решению соответствующего интегрального уравнения Фредгольма II-го рода.

Для класса уравнений Вольтерра II-го рода, соответствующих условиям теоремы 3, получаем следующее, весьма примечательное и нетривиальное приближенное решение

$$\hat{y}(x) = f(x) + f(0)K_0(x,0)\varphi(x)/(1 - K_0(0,0))/\varphi(0).$$

Для компьютерной реализации решений уравнений Вольтерра II-го рода с особенностью вида (13) использованы типовые δ-образные функции вида $sin(ms)/ms$ и $\varphi_n(s,\sigma)$ – гауссова функция стандартного нормального распределения с дисперсией σ^2. При условии $m >> 1, \sigma << 1$ указанные функции близки к функции Дирака. Рассмотрены различные типы корневых функций ядра, точные решения для резольвент получены в соответствии с теоремой 2. Как это следует из данных компьютерного моделирования, приближенные решения весьма удовлетворительно соответствуют точным, за исключением, как и следовало ожидать, небольшого начального участка, определяемого относительной шириной δ-образной функции в ядре.

Сходные результаты относительно резольвенты и совершенно иные для решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода дает представление

$$K(x,s) = K_0(x,s)\delta(x), \quad (19)$$

$$R(x,s) = R_0(x,s)\delta(x). \quad (20)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения, связывающие ядро и резольвенту, для данной особенности, полностью совпадают по виду с ранее полученными для особенности (13), в частности, резольвента определяется следующим соотношением

$$R(x,s) = \delta(x)(K_0(x,s) + K_0(x,0)K_0(0,s)/(1 - K_0(0,0))), \quad (21)$$

что дает возможность определить решение интегрального уравнения Вольтерра II-го рода с особенностью (19) в виде

$$\hat{y}(x) = f(x) + \delta(x)\int_a^x (K_0(x,s) + K_0(x,0)K_0(0,s))/(1 - K_0(0,0))f(s)ds\ . \qquad (22)$$

Однако в большинстве случаев такое решение не представляет практического интереса, поскольку приближенное решение, следующее из (22), совпадает с вынуждающей функцией $f(x)$, за исключением небольшой области определения δ-образной функции в ядре. Только если $f(x)$ является функцией конечной продолжительности, то есть имеет импульсный характер, решение (22) может быть полезным. Компьютерная реализация (22) полностью подтверждает качественный анализ.

Важное теоретическое и прикладное значение имеет задача решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода с разностной особенностью в ядре

$$K(x,s) = K_0(x,s)\delta(x - s)\ .$$

Следуя обоснованному выше подходу, получаем следующее выражение для резольвенты

$$R(x,s) = \delta(x - s)K_0(x,s)/(1 - K_0(s,s)\ , \qquad (23)$$

справедливое, если в области определения ядра выполняется условие

$$|K_0(t,t)| < 1. \qquad (24)$$

Согласно (23), решение интегрального уравнения имеет вид

$$\hat{y}(x) = f(x) + \int_a^x (K_0(x,s))/(1 - K_0(s,s))\delta(x - s)f(s)ds\ , \qquad (25)$$

что дает основание записать приближенное решение следующим образом

$$\hat{y}(x) = f(x)/(1 - K_0(x,x)\ .$$

Примечательно, что тот же результат непосредственно следует из самой записи интегрального уравнения

$$\hat{y}(x) = f(x) + \int_a^x K_0(x,s)\partial)\partial - s)y(s)ds \approx f(x) + K_0(x,x)y(x).$$

Методологической основой для получения приближенных решений уравнений Вольтерра II-го рода с δ-образной функцией в ядре является следующая оценка интеграла [11]. Рассмотрим интегральное преобразование

$$z(x) = \int_{S_k} K(x,s)w(s - x)ds\ , \qquad (26)$$

где область определения S_w функции $w(s)$ много меньше области определения S_k, причем S_w находится внутри S_k, а функция $w(s)$ полагается четной. Выполним в (26) замену переменных $s = t + x$

$$z(x) = \int_{S_k} K(x,t + x)w(t)dt\ . \qquad (27)$$

Распространяя пределы интегрирования на бесконечность после разложения подинтегрального выражения в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$, получаем следующую оценку

$$z(x) \approx K(x,x)P_w + \frac{\partial^2 K(x,t+x)}{\partial x^2}\Big|_{t=0} D_w, \tag{28}$$

где $P_w = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(t)dt$, $D_w = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 w(t)dt$.

В (28) можно пренебречь также вторым членом разложения при выполнении следующего условия

$$K(x,x) / \frac{\partial^2 K(x,t+x)}{\partial x^2}\Big|_{t=0} >> D_w / P_w, \tag{29}$$

что дает основание получить следующую оценку искомого интеграла

$$z(x) \approx K(x,x)P_w. \tag{30}$$

Соотношение (30) имеет наглядную физическую трактовку. Действительно, переходя в область Фурье-изображений, условие приближения приобретает вид

$$\frac{1}{P_w}\frac{\partial^2 F_w(\omega)}{\partial щ^2}\Big|_{щ=0} << 1/щ_k^2, \tag{31}$$

где F_w – Фурье-изображение функции $w(s)$. Поэтому для приближенного представления рассматриваемого интеграла необходимо, чтобы период гармоники максимальной учитываемой частоты в Фурье-изображении ядра по переменной s был много больше эффективной ширины функции $w(s)$.

Ряд прикладных задач исследования волновых полей, в частности задачи рассеивания волн на поверхностях объектов, имеет формулировку в виде интегральных уравнений [12], для стационарных условий – типа Фредгольма, для нестационарных – типа Вольтерра. Характерной особенностью таких уравнений является наличие осциллирующей компоненты в ядре в виде

$$K(x,s) = K_0(x,s)exp(j\varphi(s)). \tag{32}$$

Общепринятым приемом приближенного решения такого рода задач является приближение Кирхгофа [13], основанное на методе стационарной фазы, известном в приложениях так же, как метод перевала для приближенной оценки несобственных интегралов с осциллирующим ядром.

Следуя [14], приближенная оценка интеграла

$$z(x) = \int\limits_{S_k} K_0(x,s)exp(j\varphi(s))ds \tag{33}$$

определяется соотношением

$$z(x) \approx K_0(x,s_0)exp(j\varphi(s_0))(1+j)\sqrt{p/2A} = K_0(x,s_0)V(s_0), \tag{34}$$

где s_0 – корень уравнения $d\varphi(s)/ds = 0$, $A = \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}\Big|_{s=s_0}/2$.

Такая оценка основана на разложении показателя экспоненты в ряд Тейлора в окрестности точки стационарной фазы (ТСФ) с удержанием квадратичного члена разложения

$$\varphi(s - s_{0)} \approx \varphi(s_0) + (s - s_0)^2 \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}\Big|_{s=s_0}/2 \qquad (35)$$

с учетом обычно выполняющегося условия $(d\varphi(s)/ds)\big|_{s=s_0} = 0$.

После подстановки (35) в (33) имеем оценку

$$z(x) \approx exp(j\varphi(s_0))\int_{S_k} K_0(x,s)exp(jA(s-s_0)^2)ds\,. \qquad (36)$$

Оценка интеграла (36) в виде (34) образуется в предположении, что пределы интегрирования могут быть распространены на бесконечность и подинтегральная формула представляется в виде интегралов Френеля [1].

Заметим, что такая оценка является обоснованной, что и предполагается в цитируемых источниках, если экспоненциальная функция в (33) является быстро-осциллирующей функцией по отношению к интегрируемой, что в задачах рассеивания обычно выполняется, но в общем случае не является очевидным фактом.

Преобразуем (36) к виду

$$z(x) \approx exp(j\varphi(s_0))\int_{S_k} K_0(x,s)\sqrt{2\pi}\sigma_\varphi\varphi_{nj}(s_0,\sigma_\varphi)ds\,, \qquad (37)$$

где $y^2{}_\varphi = 1/2A$, $\varphi_{nj}(s_0,\sigma_\varphi)$ – гауссова функция стандартного нормального распределения со средним s_0, дисперсией $\sigma_\varphi{}^2$ и комплексным показателем в экспоненте

$$\varphi_{nj}(s_0,y_\varphi) = (1/\sqrt{2py}_\varphi)exp(j(s-s_0)^2/2y_\varphi^2).$$

Следуя (37), функция

$$w(s) = \varphi_{nj}(s_0,y_\varphi)\sqrt{2py}_\varphi \qquad (38)$$

действительно может полагаться быстроосциллирующей функцией по отношению к интегрируемой, если в пределах центрального лепестка (38) изменением подинтегральной функции можно пренебречь. Только в этом случае справедлива оценка (39)

$$\begin{aligned} z(x) &\approx exp(j\varphi(s_0))K_0(x,s_0)\int_{-\infty}^{\infty} w(s)ds = K_0(x,s_0)exp(j\varphi(s_0))\sqrt{2py}_\varphi exp(jpxp) = \\ &= K_0(x,s_0)V(s_0)\,, \end{aligned} \qquad (39)$$

что полностью совпадает с (34) и результатами в [1], [13], [14].

Следует, таким образом, указать на принципиальные особенности применения метода перевала, а именно:

– предлагаемое решение основано на использовании гауссового приближения особенности осциллирующей функции,

– применимость метода в общем случае может быть обоснована только путем исследования вторых производных подинтегральных функций.

Суммируя изложенное, можно утверждать, что метод перевала может быть эффективно использован, если гауссова кривизна функции ядра в ТСФ многократно превышает период осцилляций комплексной экспоненты.

Исследуя итерированные ядра, нетрудно показать, что резольвента интегрального уравнения Вольтерра II-го рода с ядром (32) представима в виде

$$R(x,s) = R_0(x,s)exp(j\varphi(s)), \quad (40)$$

что позволяет записать следующее уравнение для корневых функций

$$R_0(x,s) = K_0(x,s) + \int_s^x K_0(x,t)R_0(t,s)exp(j\varphi(t))dt. \quad (41)$$

Во многих случаях, в частности для сепарабельных ядер, уравнение (41) имеет аналитическое решение согласно теореме 1. Приближенное решение уравнения (41), полезное для качественного анализа, имеет вид, близкий к уравнению (16)

$$\hat{y}(x) = f(x) + f(s_0)K_0(x,s_0)V(s_0)/(1 - K_0(0,0)V(s_0)) \quad (42)$$

с уловием применимости типа (24).

Приближенное решение (42) может быть уточнено на основе использования интегралов Френеля, что дает следующую оценку резольвенты

$$R_0(x,s) = K_0(x,s) + K_0(x,s_0)K_0(s_0,s)V(s_0)Fr(x,s)/(1 - K_0(0,0)V(s_0)Fr(x,s)), \quad (43)$$

где $Fr(x,s) = (C(x) - C(s)) - j(S(x) - S(s))$.

Полученные аналитические выражения для резольвенты позволяют решить широкий класс задач, описываемых интегральными уравнениями с осциллирующим ядром. Примечательно, что решение (42) пригодно как для интегральных уравнений Фредгольма, так и Вольтерра, при условии, если особенность находится внутри области определения ядра. Решение (43) применимо только для уравнений Вольтерра.

Заключение

Таким образом, предлагаемый подход к обобщению решений некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту, дает возможность исследовать новые классы решений таких уравнений и упростить алгоритмы численной реализации при таблично заданных входных данных, что может быть весьма существенным при решении прикладных задач. Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением круга возможных типов интегральных уравнений Вольтерра II-го рода, для которых могут быть получены решения через резольвенту.

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики / Смирнов В.И. – М. : Наука, 1974. – Т. 4, ч. 1. – 336 с
2. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1968. – 448 с.
3. Верлань А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Техника, 1986. – 700 с.
4. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К. : Наук. Мысль, 1986. – 584 с.
5. Верлань А.Ф. Моделирование систем автоматического управления с реальными обратными связями на основе интегро-дифференциальных уравнений Вольтера / А.Ф. Верлань, В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас // Тр. Одесск. Гос. Политехн. Ин-та. – 2000. – Вып. 3(12). – С. 120-123.
6. Миргород В.Ф. Квадратурно-разностные алгоритмы моделирования нелинейных динамических объектов / В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас, А.Б. Волощенко // Сб. научн. Тр. ИПМЭ НАН Украины «Моделирование и информационные технологии». – 2000. – Вып. 6. – С. 152-156.

7. Миргород В.Ф. Динамические характеристики системы измерения давления в контуре регулирования $\pi_к$ / В.Ф. Миргород, В.М. Грудинкин // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 8 (34). – С. 42-45.
8. Миргород В.Ф. Обучение имитационных дифференциальных и интегральных моделей авиационных двигателей / В.Ф. Миргород, В.М. Грудинкин // Искусственный интеллект. – 2007. – № 4. – С. 329-334.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
10. Дьяконов В.П. Matlab 6.0 : Учебный курс / Дьяконов В.П.. – СПб. : Петер, 2001. – 592 с.
11. Теория когерентных изображений / под ред. Н.Д. Устинова. – М. : Радио и связь, 1987. – 264 с.
12. Горюнов А.А. Обратные задачи рассеяния в акустике / А.А. Горюнов, А.В. Сасковец. – М. : МГУ, 1989. – 152 с.
13. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики / Шендеров Е.Л. – Л. : Судостроение, 1972. – 352 с.
14. Кайно Г. Акустические волны / Кайно Г. – М. : Мир, 1990. – 656 с.

В.Ф. Миргород

Узагальнення методів аналітичного розв'язання деяких типів інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

Запропоновано узагальнення методів аналітичного розв'язання деяких типів інтегральних рівнянь Вольтерра II роду на основі відшукання роз'вязань відповідних рівнянь, що пов'язують ядро та резольвенту. Розглянуто та доведено теореми, що встановлюють аналітичний вигляд резольвенти за завданим ядром для низки важливих окремих випадків, а саме при сепарабельному вигляді ядра. Розглянуто задачі аналітичного вирішення інтегральних рівнянь Вольтерра II роду із дельтавидною та осцилюючою особливістю в ядрі.

V.F. Mirgorod

Generalization of the Methods of the Analytical Decision of Some Kinds of the Integral Equations Volterra Second Type

The offered generalization of the methods of the analytical decision of some kinds of the integral equations Volterra 2-nd type is based on finding the decisions of some equations, which are linking kernel and resolvent. Theorems which are considered and proved in this article define an analytical type by given kernel for row important quotient events, in case separable type of kernel. Also in this article considering the problems of the analytical decision of the integral equations Volterra 2-nd type with delta and oscilly particularity in kernel.

Статья поступила в редакцию 21.07.2009.